EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta **….030**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{3+5i}{7-i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(1,2,3)$ la planul $x+y+z-4=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2+4y^2=13$ dusă prin punctul $P(3,1)$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(10,2)$, $M(20,3)$ și $N(30,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,5,2)$, $B(5,2,1)$, $C(2,1,5)$ și $D(1,2,3)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(1-i)^{10}=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $2^n+3^n>5^n$.

(3p) **c)** Să se găsească o matrice $A\in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ astfel încât $rang(A)=1$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+8)=2$.

(3p) **e)** Să se calculeze inversa matricei $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=xe^{x^2}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră un număr prim $p, p \geq 3$, iar în corpul $\mathbf{Z_p}$ se consideră submulțimea $G = \mathbf{Z_p} \setminus \{\hat{0}\}$. Considerăm polinoamele $g, h \in \mathbf{Z_p}[X]$, definite prin $g = X^{p-1} - \hat{1}$, $h = (X - \hat{1})(X - \hat{2})\ldots(X - (\hat{p} - \hat{1}))$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $\hat{x}, \hat{y} \in G$, atunci $\hat{x} \cdot \hat{y} \in G$.

Pentru un element $\hat{a} \in G$, definim funcția $f : G \to G$, $f(\hat{x}) = \hat{a}\hat{x}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este injectivă **.**

(4p) **c)** Să se arate că funcția f este bijectivă .

(2p) **d)** Din egalitatea $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) = f(\hat{1}) \cdot f(\hat{2}) \cdot \ldots \cdot f(\hat{p} - \hat{1})$, să se deducă relația $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$, $\forall\ \hat{a} \in G$.

(2p) **e)** Să se arate că $g(\hat{x}) = h(\hat{x}) = \hat{0}$, $\forall\, \hat{x} \in G$

(2p) **f)** Să se arate că $\hat{1} \cdot \hat{2} \cdot \ldots \cdot (\hat{p} - \hat{1}) + \hat{1} = \hat{0}$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbf{N}^*$, prime între ele, atunci p îl divide pe a .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx, n \geq 1$.

Se consideră şirul $(w_n)_{n\geq 1}$ definit prin $w_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$.

(4p) **a)** Să se calculeze I_0 şi I_1 .

(4p) **b)** Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \forall n \geq 2$.

(4p) **c)** Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $I_{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1}$ **,** $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se verifice că $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} w_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.